

弾性波動を用いた皮膚感覚ディスプレイ

奈良 高明^{*1}, 柳田 康幸^{*1}, 前田 太郎^{*1}, 館 暲^{*1}

A Tactile Display Using Elastic Waves

Takaaki Nara^{*1}, Yasuyuki Yanagida^{*1}, Taro Maeda^{*1}, and, Susumu Tachi^{*1}

Abstract - As a basis for tactile display, it is important to understand the mechanism of tactile sensation. So, we analyze elastic waves inside a finger in tactile exploration with a two-layered, half-infinite elastic finger model, and derive a mapping from objects shapes to mechanoreceptors displacements. It is shown that this mapping is a one-to-one mapping. Therefore, it is necessary to create the same finger surface displacement as in actual exploration for tactile virtual reality (VR). However, the mapping from objects shapes to finger surface displacements is shown to be a many-to-one mapping because of the mechanical property of skin. So, we use the envelope of the amplitude-modulated Lamb wave on an elastic plate as an alternative shape to the real object, because its shape is easily controlled. The generation of the wave is confirmed with an experimental device of silicon rubber vibrated by voice coils.

Keywords : tactile display, elastic wave, Lamb wave, amplitude modulated wave

1. はじめに

人間の触覚は、深部感覚と皮膚感覚とに大別される。本研究は、物体表面の細かいテクスチャやざらざら感、材質感などの皮膚感覚提示を目的とする。

さまざまなアクチュエータを用いた皮膚感覚ディスプレイが提案されている ([1]-[4])。しかし、触覚が生じる際の物理現象に関する解析は十分なされていないため、触覚ディスプレイを触ったとき、指の内部にどのような物理的状態がもたらされ、その結果、どのような触覚が生じているかに関する予測ができなかった。触覚のメカニズムの研究を精緻に行なえば、ある惹起させたい感覚に対し、どのような刺激を指表面に提示すべきかが明らかになると考えられる。

静的な触覚に関しては、指の弾性体モデルを用いた皮膚の静的変形の解析がなされている ([5][6])。しかし、触覚においては、なぞり動作、能動触が本質的に重要であり、皮膚の動的変形に関する解析も行なうべきである。実際、指で物体をなぞると、指の表面に変位、あるいは応力の時空間分布が与えられる。すると層状弾性体構造をなす指の内部に弾性波動が発生する。指の内部の存在する4種類の機械受容器細胞は、この弾性波動の何らかの物理量を検出して発火し、皮膚感覚が生成される。これが、皮膚感覚生成メカニズムの概観であり、したがって、指内部に生じる弾性波動は触覚にとって本質的に重要である。そこで本稿では、指内部の弾性波動を、半無限2層弾性体から成る指のモデルを用いて詳細

に検討する。

さて、ここで、触覚とは、外界の物理的状態が、機械受容器細胞の物理的状態に写像されることによって生じる、と捉えてみる。([7][8][9]) 具体的には、外界の物理的状態とは、例えば、物体の幾何的形狀であり、機械受容器細胞の物理的状態とは、すべての機械受容器の変位状態の集合、などを考えることができる。このとき、上記の解析により、物体の幾何形状から、受容器変位への写像の表式を具体的に導出することができる。

ここで、この写像が一對一写像であるか、多対一写像であるかがVRにとって問題になる。なぜならば、もし一對一であれば、ある現実感、それを生む実際の現実からしか生まれないことになる。従って、任意の現実感を人工的に作るためには、触覚提示においては、任意の物体形状を作り出さなければならないからである。しかしこれを実時間で行なうのは困難である。ところが、もしこの写像が多対一写像であれば、異なる2つの物体形状から同一の触覚を生ぜしめうる。これは、あるリアリティを生み出すのに、実際の物体形状とは異なる別の物体形状を提示しうることを意味する。この別の物体形状が、実際の形状よりも生成、制御が容易ならば、これをディスプレイ上で提示することが考えられるわけである(図1)。

以下で、本論文の概要を述べる。第2節で、指の層状弾性体モデルを用いてなぞり際の弾性波動現象を解析し、皮膚表面の変位から機械受容器細胞変位への写像 F を導出する。この写像 F は、指の構造の特性的性質から一對一写像であることが示される。そこで次に第3

*1: 東京大学大学院 工学系研究科

*1: Faculty of engineering, University of Tokyo

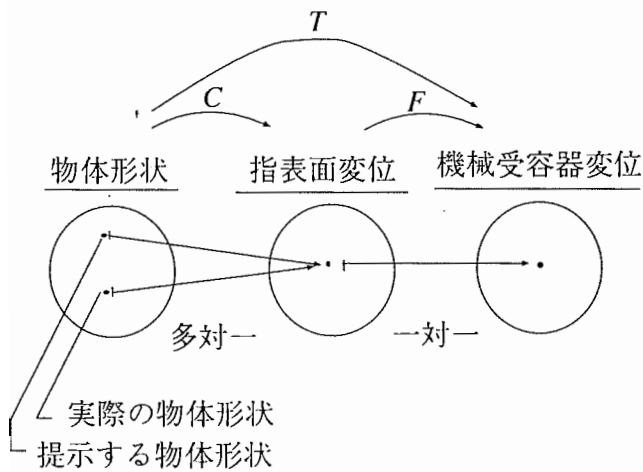


図1 多対一写像によるVR; Cは皮膚と物体との接触により決まる写像. Fは指の弾性体により規定される写像. CとFの合成写像であるTが触覚写像である.
Fig.1 VR by Many-to-one mapping

節で、物体形状から皮膚表面変位への写像Cを考え、皮膚の非線形特性により多対一となることを示す。第4節で、Cの多対一性に基つき、Lamb波とよばれる弾性波動を振幅変調することによりVRを構成する方法を提案し、シリコンゴムをボイスコイルで励振する実験機上で振幅変調波の発生を確認した結果を述べる。

2. 皮膚感覚現象の解析

2.1 指の弾性体モデル

現在までに行なわれている皮膚感覚現象の解析として、指の弾性体モデルを用いたものがあげられる。[5]では指を、一様、等方、非圧縮、半無限弾性体でモデル化し、皮膚表面に刺激を与えたときの受容器の応答を理論的に導き出している。この理想化したモデルにより、SAI受容器の応答がよく予測されているが、ここでの刺激は静的なものに限られている。[6]もまた指の静的弾性変形を、4種類の指形状のモデルを用い、有限要素法により解析している。

皮膚の動的特性は、主に医学的動機から、解析されている。([10],[11],[12],[13])特に[12],[13]では、層状構造をもつ弾性体という実際の指の構造により近いモデルが用いられている。しかしこれらは、皮膚に水平方向の振動を与えたときに発生するSH波の解析にとどまっている。なぞりに際しての触覚現象の解析には、皮膚表面と平行方向、垂直方向の2方向変位の時空間分布を境界条件として持つ、一般的な弾性波動解析が必要である。

そこで本論文では、図2のような半無限2層弾性体モデルで2次元問題を考察する。x-軸を皮膚と水平方向に、z-軸を垂直方向にとる。平面z=0が第一

層と第二層の境界を表す。第一層は真皮と表皮を表し、 $0 < z < H$ にあるとし、 $z < 0$ にある第二層が皮下組織を表す。両層は、一様、等方、線形弾性体であると仮定し、それぞれ異なる弾性定数を有しているとする。

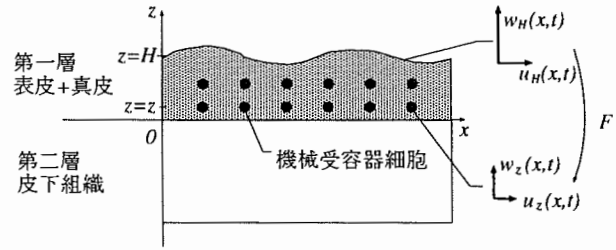


図2 指の半無限2層弾性体モデル
Fig.2 Two-layered elastic half-space finger model

指で物体表面をなぞると、指の表面にx, z2方向の変位、または応力の境界条件が指表面に与えられる。線形半無限弾性体においては表面での変位と応力は互いに交換されるので、ここでは変位境界条件を用いて解析することにする。

以下では次の記号を用いる：

- (u_i, w_i) : 第i層 変位 ($i = 1, 2$)
- $(U_H, W_H) = (u_1, w_1)|_{z=H}$
- $(u_z, w_z) = (u_1, w_1)|_{z=z}$
- λ_i, μ_i : 第i層 ラメの定数
- μ_i : 第i層 剛性率
- ρ_i : 第i層 密度
- α_i : 第i層 P波速度
- β_i : 第i層 S波速度

2節の論点は次の通りである。まず第一に、指の表面 $z = H$ における(x, z)-2方向変位(U_H, W_H)から、第一層の深さzの位置に存在する受容器細胞の(x, z)-2方向変位(u_z, w_z)への写像Fを導出する。換言すれば、(u_z, w_z)を(U_H, W_H)を用いて表す、ということである。結果は2.2節(29)に与えられる。これを用いた例として2.3節において、正弦形状物体を指でなぞったときの指内部の振幅分布を求める。

第二に、2.4節で、こうして求めた写像Fが一対一写像であることを示す。これは、指という層状弾性体の特徴的性質 - 第一層が第二層よりも硬い; $\mu_1 > \mu_2$ - が本質的な要件であることが示される。

2.2 指表面変位から受容器細胞変位への写像の導出
第i層 ($i=1,2$) における変位(u_i, w_i)に対し、

$$u_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i}{\partial z}, \quad w_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial z} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \quad (1)$$

にて変位ポテンシャル(ϕ, ψ)を定義すれば、これらは

$$\frac{1}{\alpha_i^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi_i, \quad \frac{1}{\beta_i^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi_i \quad (2)$$

なる波動方程式に従う。これらの解として、次の形のものを仮定する:[14] (ここでは $e^{j(kx+\omega t)}$ を省略して記す)

$$\phi_1 = (P \cosh r_1 z + Q \sinh r_1 z) \quad (3)$$

$$\phi_2 = P' e^{r_2 z} \quad (4)$$

$$\psi_1 = (A \cosh s_1 z + B \sinh s_1 z) \quad (5)$$

$$\psi_2 = A' e^{s_2 z} \quad (6)$$

ただし

$$r_i = \sqrt{k^2 - k_{\alpha_i}^2}, \quad s_i = \sqrt{k^2 - k_{\beta_i}^2} \quad (7)$$

$$k_{\alpha_i} = \frac{\omega}{\alpha_i}, \quad k_{\beta_i} = \frac{\omega}{\beta_i} \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

この表式に含まれる6つの未知係数 P, Q, A, B, P', A' が (U_H, W_H) で書ければ、これらを(3)-(6), 更に, (1)に代入することで, (u_z, w_z) の (U_H, W_H) による表式が得られる。

6つの未知係数 P, Q, A, B, P', A' を決定するために、以下の6つの境界条件を用いる：

i) $z = 0$ における変位と応力の連続条件

$$\bullet \quad (T_{zz})_1 = (T_{zz})_2 \quad \text{at } z = 0 \quad (9)$$

$$\bullet \quad (T_{zx})_1 = (T_{zx})_2 \quad \text{at } z = 0 \quad (10)$$

$$\bullet \quad u_1 = u_2 \quad \text{at } z = 0 \quad (11)$$

$$\bullet \quad w_1 = w_2 \quad \text{at } z = 0 \quad (12)$$

ii) なぞりの際, $z = H$ に与えられる変位境界条件

$$\bullet \quad (u_1)_{z=H} = U_H = U_H^* e^{j(kx+\omega t)} \quad \text{at } z = H \quad (13)$$

$$\bullet \quad (w_1)_{z=H} = W_H = W_H^* e^{j(kx+\omega t)} \quad \text{at } z = H \quad (14)$$

まず, (9), (11) から, P, B が P', A' によって次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} P \\ B \end{pmatrix} = \frac{k^2}{k_{\beta_1}^2} \begin{pmatrix} X & \frac{s_2}{k} W \\ \frac{k}{s_1} Z & \frac{s_2}{s_1} Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P' \\ A' \end{pmatrix} \quad (15)$$

同様に, (10), (12) から, Q, A が P', A' によって

$$\begin{pmatrix} Q \\ A \end{pmatrix} = \frac{k^2}{k_{\beta_1}^2} \begin{pmatrix} \frac{r_2}{r_1} Y & \frac{k}{r_1} Z \\ \frac{r_2}{r_1} W & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P' \\ A' \end{pmatrix}, \quad (16)$$

と書き表せる。ただし,

$$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (17)$$

$$X = \mu \frac{k_{\beta_2}^2}{k^2} - 2(\mu - 1), \quad (18)$$

$$W = 2(\mu - 1), \quad (19)$$

$$Z = \mu \frac{k_{\beta_2}^2}{k^2} - \frac{k_{\beta_1}^2}{k^2} - 2(\mu - 1), \quad (20)$$

$$Y = \frac{k_{\beta_1}^2}{k^2} + 2(\mu - 1). \quad (21)$$

とした。一方, (13), (14) は, (1),(3),(4),(5),(6) を用いることにより,

$$\begin{pmatrix} -k \cosh r_1 H & s_1 \cosh s_1 H \\ r_1 \sinh r_1 H & -k \sinh s_1 H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k \sinh r_1 H & s_1 \sinh s_1 H \\ r_1 \cosh r_1 H & -k \cosh s_1 H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_H^* \\ W_H^* \end{pmatrix}, \quad (22)$$

と変形される。そこで(15), (16)を(22)に代入することにより次式を得る：

$$G_z|_{z=H} \cdot \begin{pmatrix} P' \\ A' \end{pmatrix} = \frac{k_{\beta_1}^2}{k^3} \begin{pmatrix} U_H^* \\ W_H^* \end{pmatrix}, \quad (23)$$

ただし,

$$G_z = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$g_1 = -X \cosh r_1 z + Z \cosh s_1 z - \frac{r_2}{r_1} Y \sinh r_1 z + \frac{s_1 r_2}{k^2} W \sinh s_1 z,$$

$$g_2 = -\frac{s_2}{k} W \cosh r_1 z + \frac{s_2}{k} Y \cosh s_1 z - \frac{k}{r_1} Z \sinh r_1 z + \frac{s_1}{k} X \sinh s_1 z,$$

$$g_3 = \frac{r_2}{k} Y \cosh r_1 z - \frac{r_2}{k} W \cosh s_1 z + \frac{r_1}{k} X \sinh r_1 z - \frac{k}{s_1} Z \sinh s_1 z,$$

$$g_4 = Z \cosh r_1 z - X \cosh s_1 z + \frac{r_1 s_2}{k^2} W \sinh r_1 z - \frac{s_2}{s_1} Y \sinh s_1 z. \quad (25)$$

ゆえに, もし $\det G_z|_{z=H} \neq 0$ (付録で示す) が成り立つならば, (23) は (P', A') について,

$$\begin{pmatrix} P' \\ A' \end{pmatrix} = \frac{k_{\beta_1}^2}{k^3} G_H^{-1} \begin{pmatrix} U_H^* \\ W_H^* \end{pmatrix}. \quad (26)$$

のように解ける。

さて, (22) は, $z = H$ のみならず, 任意の z に対して成り立つ：

$$G_z \cdot \begin{pmatrix} P' \\ A' \end{pmatrix} = \frac{k_{\beta_1}^2}{k^3} \begin{pmatrix} u_z^* \\ w_z^* \end{pmatrix}. \quad (27)$$

従って、(26) を (27) に代入することにより、

$$\begin{pmatrix} u_z^* \\ w_z^* \end{pmatrix} = G_z \cdot G_H^{-1} \cdot \begin{pmatrix} U_H^* \\ W_H^* \end{pmatrix} \quad (28)$$

を得る。

結局、 $\det G_z|_{z=H} (\equiv \det G_H^{-1})$ が零でないとき、 (u_H^*, w_H^*) から (u_z^*, w_z^*) への写像 F が

$$F = G_z \cdot G_H^{-1}, \quad (29)$$

と求まったわけである。ただし、 G_z は (24),(25) で与えられる。

2.3 写像 F の適用例; 正弦形状をなぞった際の指内部の振幅分布

一定速度 v_0 でのなぞり動作を考える。このときの指表面における変位分布のフーリエ変換の基本要素として、空間周波数 k_0 をもち、速度 v_0 で進行する、 z -方向の正弦形状を考える。このとき時間周波数は $\omega_0 = k_0 v_0$ となる。つまり、境界条件として、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_H \\ W_H \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ A \cos K(x + v_0 t) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_H^* \\ W_H^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ A \delta(k - k_0, \omega - k_0 v_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

なる変位分布を考える。

この境界条件に (29) で得られた写像 F を適用すると、このときの指内部の変位分布が求まる。(図3)

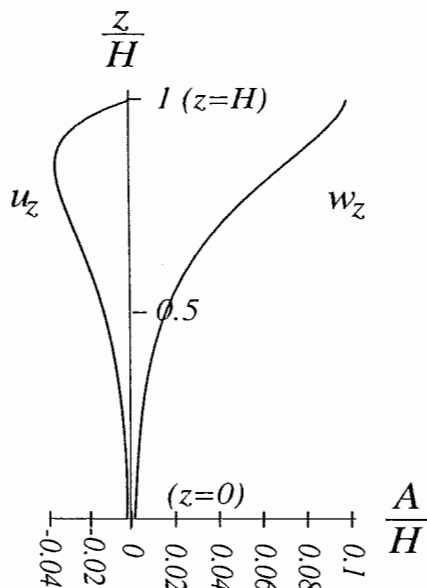


図3 正弦形状をなぞったときの指内部の振幅分布 ($A=0.1[\text{mm}]$, $H=1[\text{mm}]$, $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}=1[\text{mm}]$)

Fig.3 Amplitude distribution inside the finger in exploring a sinusoidal shape

z 方向変位 w_z は指表面から単調に減少するが、 x 方向変位 u_z は、指内部のある深さにおいて最大値をとる。この深さ z は、空間周波数が増すほど指表面に近くなる。

2.4 写像 F が一対一となること

写像 F に対し、次が成り立つことが示せる。

定理 2層弾性体において、なぞり境界条件(進行波境界条件)を考える。このとき、 $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1} < 1$ ならば F は一対一写像である。

この定理は、2層構造をもつ弾性体において、 $\mu < 1$ 、すなわち、上層の剛性率 μ_1 が下層の剛性率 μ_2 より大きい、つまり、上層ほど硬い弾性体の場合、弾性体内部の変位は、表面における変位により一意的に定まることを示している。人間の指を2層弾性体と考えた場合、文献[13]より、

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 6 \times 10^5 [\text{Pa}] , \quad \mu_2 = 2 \times 10^5 [\text{Pa}] \\ \Rightarrow \mu &= \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{3} < 1 \end{aligned}$$

であるから定理の仮定を満たし、指において、皮膚表面変位は、細胞変位に一対一に写しとられることがわかる。

定理の証明の方針を述べる。 F が一対一となるためには $\det G_z \neq 0$ であればよいので、 $\det G_z$ を z の関数として表し、

- ・ $\det G_{z=0} > 0$
- ・ $\det G$ は z の単調増加関数

であることを示せばよい。(詳細は付録A)

この定理の証明において、 $\mu < 1$ であることが本質的であり、 $\mu > 1$ の場合は反例を構成することができる(付録B)。生体の皮膚が情報を落さない $\mu < 1$ なる構造を持っていることは興味深い。

3. 多対一 VR の原理

前節定理により、VRを構成するためには、指の表面変位を現実と一致させなければならないことがわかった。そこで次に、表面変位から細胞変位への写像 F の前に、物体形状から表面変位への、「物体と指との接触を表す写像」 C を考え、この C の多対一性を検討する。(図1.)

指に対して十分細かいテクスチャを速度 v_0 でなぞったとき発生する任意の皮膚表面変形は、フーリエ変換により正弦進行波の重ね合わせで書けるので、その構成要素である空間・時間周波数 (k_0, ω_0) (但し、 $\omega_0 = k_0 v_0$) の皮膚変形を考える。このとき、「空間周波数 k_0 の物体を直接作りだし、速度 v_0 で指表面を移動させる」ことなくこの皮膚変形を作り出せないだろうか。

$$k_1 - k_2 = 2k_0, \quad \omega_1 - \omega_2 = 2\omega_0$$

を満たすような時空周波数 $(k_1, \omega_1), (k_2, \omega_2)$ をもつ Lamb 波を起こせばよい。 —

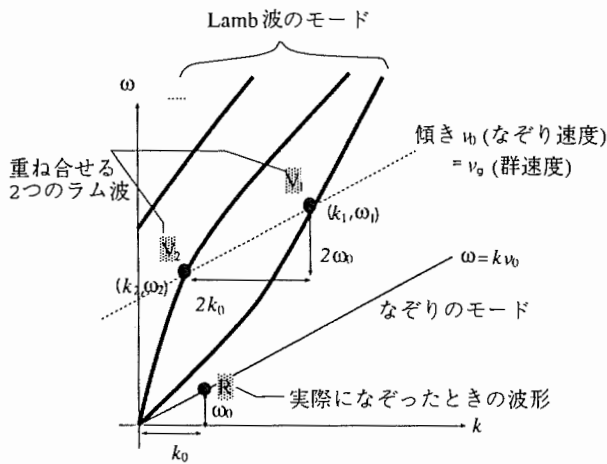


図5 振幅変調 Lamb 波によるなぞり感提法 R を提示しても $V_1 + V_2$ を提示しても、皮膚表面変形は一致する

Fig.5 Method to display tactile exploration sensation using amplitude modulated Lamb waves

実際にどのモードを使うか、どの周波数領域は、デバイスの設計に基づき決めるべきものである。これに関して、次節で検討する。

4. 実験

4.1 構成

弾性板上に Lamb 波を励振させる方法として、進行波型超音波リニアモーターの研究 [15] が参考になる。これらは基本的には、金属の板、あるいは棒材に、単一周波数の Lamb 波を励振するものである。しかし、前節までに基本原理を示した振幅変調波を用いる触覚ディスプレイのためには、Lamb 波の異なるモードの、異なる周波数の波動を同時に励振しなければならない。これを実現するために、次のような構成をとる。

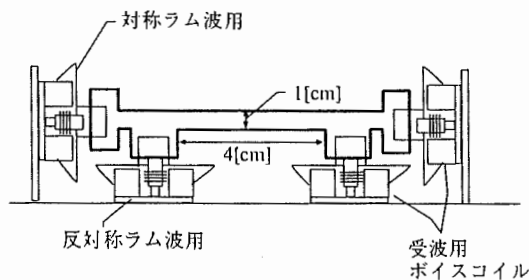


図6 構成
Fig.6 Construction

弾性板の長さ方向に対し、垂直方向の振動を加えるのが反対称 Lamb 波 (横波) 励振用の振動子であり、長さ

方向の振動を加えるのが対称 Lamb 波 (縦波) 励振用の振動子である。弾性板左右両側の振動子のうち、どちらか一方で励振し、他方で受波する。このとき、受波側でインピーダンス整合をとれば、進行波を弾性板上に発生させることができる。従って、駆動側を逆転させることにより、左右どちら向きの進行波をも励振させることができる。ボイスコイルには、 $8[\Omega], 50[W]$ の Woofer を用いた。

4.2 材質

振動子から与えられるパワーが一定であるとする、振幅を大きくとるためには、駆動周波数が低い方がよい。ところが、駆動周波数を下げると、Lamb 波の空間周波数も低くなり、触覚ディスプレイとして表現できる空間解像度が下がってしまう。時間周波数を下げつつ空間周波数を高く保つには、弾性波動の位相速度が小さいもの、従って、軟らかく、ヤング率が小さい弾性体を用いることが考えられる。

そこで今回は、弾性板として、厚さ $1[cm]$ 、幅 $2[cm]$ のシリコンゴムを用いることにした。分散曲線を描いてみると、シリコンゴムを用いるならば、可聴域程度の振動で数 cm 程度の空間波長を実現できることがわかる。

4.3 実験結果

対称、反対称モードそれぞれを $30[Hz]$ で励振したところ、振幅変調波形を発生することができた。包絡波形を触っている様子を図7に示す。対称、反対称モードの周波数に差をもたせると、静止していた包絡波が移動していく (群速度が0でなくなる) 様子も確認した。

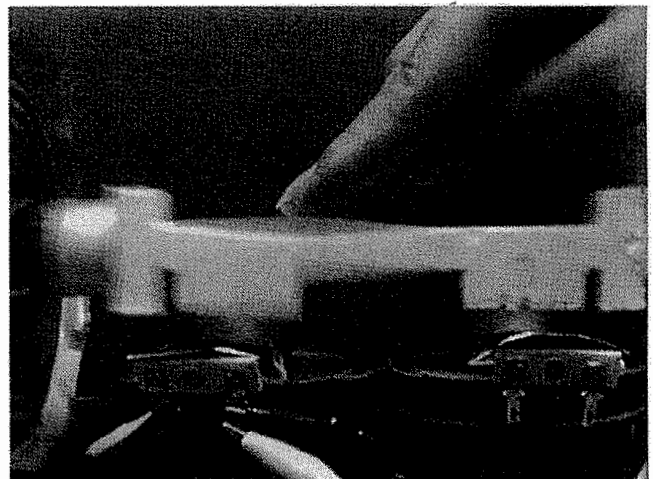


図7 実験：包絡波を触る。薄く見えている波形が包絡波である。与える2つの振動数を制御することにより、原理的には任意の波長と進行速度 (= 群速度) をもった包絡波が実現できる

Fig.7 Experiment: Touching an envelope of an amplitude modulated Lamb wave

4.4 今後の課題

現在では、駆動時間周波数が30[Hz]と低いため、空間波長も長く、また、搬送周波数も振動として感じられてしまう。

検波がなされる十分高い搬送周波数を用いるために、今後まず、受波側のインピーダンスマッチングを行ない、対称、反対称モード単独で、任意波長の進行波を確実に発生できるようにする。そして、振幅変調波形の包絡成分の波長、群速度の制御を数kHz程度の周波数で行ない、任意波長、任意速度の形状を瞬時に発生させるディスプレイを目指す。

参考文献

- [1] R.D.Howe, et al., "Remote palpation Technology," *IEEE engineering in Medicine and Biology*, Vol.14, No.3, pp. 318-323.
- [2] Y.Ikei, K.Wakamatsu, S.Fukuda, "Texture presentation by vibratory tactile display," *Proc. VRAIS '96*, IEEE, pp. 199-205.
- [3] M.Shimojo, M.Shinohara, Y.Fukui, "Shape identification performance and pin-matrix density in a 3 dimensional tactile display," *Proc. VRAIS '96*, IEEE, pp. 180-187.
- [4] G.C.Burdea, *Force and touch feedback for virtual reality*, Wiley interscience, 1994.
- [5] J.R.Phillips, K.O.Johnson, "Tactile Spatial Resolution-III. A Continuum Mechanics Model of Skin Predicting Mechanoreceptor Responses to Bars, Edges, and Gratings," *J.Neurophysiol.*, Vol. 46, No. 6, pp. 1204-1225, 1981.
- [6] Srinivasan M.A. and Dandekar K, "An investigation of the mechanics of tactile sense using two dimensional models of the primate fingertip," *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol 118, pp. 48-55, 1996.
- [7] 奈良, 前田, 館: 第1回VR学会大会論文集, 1996, 181-184
- [8] 奈良, 前田, 柳田, 館: 第2回VR学会大会論文集, 1997, 181-184
- [9] T.Nara, T.Maeda, Y.Yanagida, S.Tachi "Tactile Display Using Elastic Waves", *Proc. VRAIS '98*, IEEE, pp. 43-50.
- [10] H.E.Gierke et al.: Physics of Vibrations in Living Tissues, *J.appl.Physiol.*,4(1951),886-900
- [11] T.J.Moore: A Survey of the Mechanical Characteristics of Skin and Tissue in Response to Vibratory Stimulation, *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*, vol11, No.1(1970),79-84
- [12] H.E.Pereira: Analysis of Shear Wave Propagation in Skin, *J.Biomech.*,23(1990),745-751
- [13] H.E.Pereira et al.: The Effects of Layer Properties on Shear Disturbance Propagation in Skin, *Transactions of the ASME*,113(1991),30-35
- [14] W.M.Ewing et al.: *Elastic Waves in Layered Media*, McGrawHill, 1957
- [15] 黒澤 実: 複合振動子型超音波リニアモータに関する基礎的研究, 東京工業大学 博士論文
- [16] 奈良: 弾性波動を用いた触覚ディスプレイ, 東京大学大学院工学系研究科 計数工学専攻修士論文, 1997

付録 A. 定理の証明

まず $\det G_z$ を z の関数として表す。(24),(25)より,

$$\begin{aligned} \det G_z &= g_1 \cdot g_4 - g_2 \cdot g_3 \\ &= 2 \left(-XZ + \frac{r_2 s_2}{k^2} YW \right) \\ &+ \frac{1}{2} \cosh(r_1 + s_1)z \cdot \left[\left(1 - \frac{r_1 s_1}{k^2} \right) \left(X^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} W^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{k^2}{r_1 s_1} \right) \left(Z^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} Y^2 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \cosh(r_1 - s_1)z \cdot \left[\left(1 + \frac{r_1 s_1}{k^2} \right) \left(X^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} W^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{k^2}{r_1 s_1} \right) \left(Z^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} Y^2 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sinh(r_1 + s_1)z \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} + \frac{s_2}{s_1} \right) \left(1 - \frac{r_1 s_1}{k^2} \right) (XY - ZW) \\ &+ \frac{1}{2} \sinh(r_1 - s_1)z \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{s_2}{s_1} \right) \left(1 + \frac{r_1 s_1}{k^2} \right) (XY - ZW). \end{aligned}$$

と書ける。

F が一対一となるための必要十分条件は、 $\det G_z \neq 0$ となることである。これを、

- i) $\det G_{z=0} > 0$,
- ii) $\det G$ は z の単調増加関数

の手順で示す。

$$\begin{aligned} \text{i) } \det G_{z=0} &= \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{\alpha_2^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\beta_2^2}} \right) \frac{k_{\beta_1}^4}{k^4} > 0 \\ &(\because v < \alpha_i, \beta_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{d}{dz} \det G_z &= \frac{1}{2} (r_1 + s_1) \sinh(r_1 + s_1)z \\ &\cdot \left[\left(1 - \frac{r_1 s_1}{k^2} \right) \left(X^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} W^2 \right) + \left(1 - \frac{k^2}{r_1 s_1} \right) \left(Z^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} Y^2 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} (r_1 - s_1) \sinh(r_1 - s_1)z \\ &\cdot \left[\left(1 + \frac{r_1 s_1}{k^2} \right) \left(X^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} W^2 \right) + \left(1 + \frac{k^2}{r_1 s_1} \right) \left(Z^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} Y^2 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} (r_1 + s_1) \cosh(r_1 + s_1)z \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} + \frac{s_2}{s_1} \right) \left(1 - \frac{r_1 s_1}{k^2} \right) (XY - ZW) \\ &+ \frac{1}{2} (r_1 - s_1) \cosh(r_1 - s_1)z \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{s_2}{s_1} \right) \left(1 + \frac{r_1 s_1}{k^2} \right) (XY - ZW). \end{aligned} \tag{34}$$

ここで、 $\alpha_1 > \beta_1 > v$ という仮定から、

$$r_1 - s_1 = k \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{\alpha_1^2}} - \sqrt{1 - \frac{v^2}{\beta_1^2}} \right) > 0,$$

故に、もし(34)における4つの係数が正であれば、

$\frac{d}{dz} \det G_z > 0$ が成り立つ。

(第一項の係数が正になること)

$$\begin{aligned} \cdot 1 - \frac{r_1 s_1}{k^2} &= 1 - \left(1 - \frac{v^2}{\alpha_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{\beta_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq 1 - \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) \left(1 - \frac{b_1}{2}\right) \\ &\simeq \frac{a_1 + b_1}{2} \\ \cdot 1 - \frac{k^2}{r_1 s_1} &= 1 - \left(1 - \frac{v^2}{\alpha_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{\beta_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\simeq -\frac{a_1 + b_1}{2} \end{aligned}$$

であることを用いて

・ 第一項の係数

$$\begin{aligned} &= \frac{a_1 + b_1}{2} \left[\left(X^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} W^2\right) - \left(Z^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} Y^2\right) \right] \\ &= \frac{a_1 + b_1}{2} \left[\left(X^2 - Z^2\right) - \frac{r_2 s_2}{k^2} (W^2 - Y^2) \right] \\ &> \left(X^2 - Z^2\right) - (W^2 - Y^2) \quad (\because \mu < 1 \Rightarrow |W| > |Y|) \\ &= (X + Z)(X - Z) - (W + Y)(W - Y) \\ &= b_1(X + Z + W + Y) \quad (\because X - Z = Y - W = \mu b_2) \\ &= 2b_1^2 > 0 \end{aligned}$$

(第二項の係数が正となること)

$$\begin{aligned} \cdot X^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} W^2 &> 0. \quad (\because \mu < 1 \Rightarrow |X| > |W|) \\ \cdot Z^2 - \frac{r_2 s_2}{k^2} Y^2 &> 0 \quad (\because \mu < 1 \Rightarrow |Z| > |Y|) \end{aligned}$$

より明らか。

(第三、四項の係数が正となること)

$$\begin{aligned} \cdot \frac{r_2}{r_1} - \frac{s_2}{s_1} &\simeq \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) \left(1 + \frac{a_1}{2}\right) - \left(1 - \frac{b_2}{2}\right) \left(1 + \frac{b_1}{2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \cdot \frac{b_2 - b_1}{2} > 0 \\ &(\because \mu < 1 \Rightarrow \beta_2 < \beta_1 \iff b_2 > b_1) \\ \cdot XY - ZW &= (Z + b_1)(W + b_1) - ZW \\ &= b_1(Z + W) + b_1^2 \\ &= b_1^2 > 0 \end{aligned}$$

より明らか。以上より、 $\forall z$ に対し、

$$\frac{d}{dz} \det G_z > 0$$

となる。これで、 $\det G_z$ は、 $z = 0$ において正であり、 $z > 0$ に対し、単調増大であることが示された。従って、

任意の z に対し、 $\det G_z$ は正であり、0 になることはない。(証明終り)

付録 B. $\mu > 1$ のとき F が多対一となることの例

付録 A で見たように、 $\det F$ の表式は、 $\mu - 1$ なる項を含み、その性質は $\mu = 1$ を境に変化することが予想される。実際、 F が一対一となるための十分条件は $\mu < 1$ であり、 $\mu > 1$ のとき F が多対一となる数値例が以下のよう構成できる。

例として、 $H = 1[\text{mm}]$ の 2 層弾性体において、 $\det G_z$ を μ の関数として描いた曲線を図 8 に示す。ただし、諸定数は $\alpha_2 = 1.5[\text{m/s}]$, $\beta_2 = 1.0[\text{m/s}]$, $v_0 = 0.9[\text{m/s}]$ とし、

$$kz = 1 \tag{35}$$

を満たしているものとする。

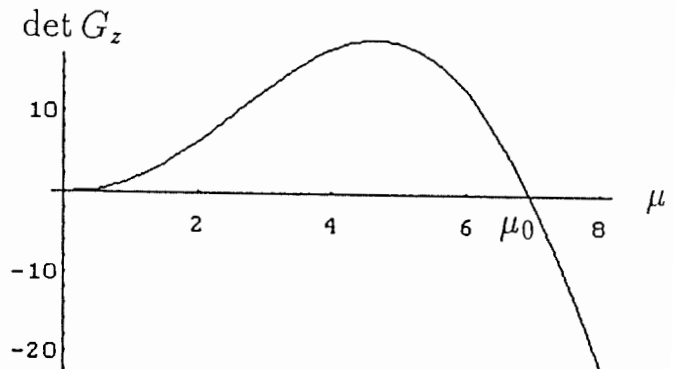


図 8 $\det G_z$
($\mu = \mu_0 (> 1)$, $\alpha_2 = 1.5[\text{m/s}]$, $\beta_2 = 1.0[\text{m/s}]$,
 $v_0 = 0.9[\text{m/s}]$, $kz = 1$.)

グラフからわかるように、 $\mu < 1$ では $\det G_z > 0$ であるが、 $\mu = 7$ 付近 (この値を μ_0 とおく) で $\det G_z = 0$ となる。すなわち、 $\mu (= \frac{\mu_2}{\mu_1} = \mu_0) > 1$ であるような、第二層の方が第一層より硬い層状弾性体においては、 $\det G_z$ が零となりうる。

今、弾性体内部の信号変換器 (人間の皮膚においては機械受容器細胞) の深さを $z = Z_r$ に固定する。(35) より空間周波数 $K_r = \frac{1}{Z_r}$ が決まり、この波数をもつ進行波境界条件を与えると、 $z = Z_r$ で $\det G_z$ が零となる。同じ K_r に対し、 $\det G_z|_{z=H} \neq 0$ となるから G_H^{-1} は存在して (29) の F の表式は意味をなし、 $\det F = 0$ となる。これは $\text{Ker} F$ の元 (零元) の存在を意味する。すなわち、深さ Z_r において、 x, z 2 方向とも変位が零となるような境界条件が存在する。

実際、図8で得られた μ_0 を用いると、(29)より、 F の零元として、

$$\begin{pmatrix} U_H \\ W_H \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3.34 \\ 0.47 \end{pmatrix} \quad (\alpha \text{は任意定数})$$

が得られる。例えば、 $Z_r = \frac{H}{2}$ (第一層の中間点)としたとき、この点において x, z 方向変位がともに零となる様子を図9に示す。このときの波数 K_r は、(35)より $\frac{2}{H}$ 、従って、波長 $2\pi \frac{H}{2} = 3.14[\text{mm}]$ である。

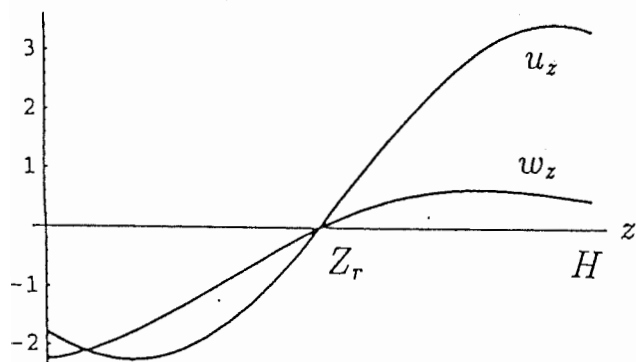


図9 $\mu = \mu_0$ なる層状弾性体に波数 K_r の進行波境界条件を与えると $z = Z_r$ において、 u_z, w_z ともに零となる。

このような F の零元の存在から、 F の多対一性が導かれる。ある境界条件に対し、これに零元を加えた境界条件を考える。 $z = Z_r$ において両境界条件を区別することはできない。何故ならば、 Z_r においては零元を感知できないからである。換言すれば、 $\mu > 1$ の2層弾性体においては、任意の深さ z に対し、(35)より決まる、いわば”盲点”となる空間周波数が存在する。これが $\mu > 1$ のときの写像 F の多対一性である。人間の指では $\mu < 1$ であり、このように情報が落ちることはない。したがって、付録Bは直接、触覚提示に関係するものではない。しかし人間の皮膚型触覚センサを考える際には、情報が一對一に写像されるか、多対一写像によって情報洩れが生じるかは同じように重要な観点であり、このときパラメタ μ が1より大きいか小さいか、すなわち、第一層と第二層どちらを硬くするかが本質的であることが示唆されたわけである。

(1998年4月1日受付)